FS1111

Vectores

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Introducción

El curso FS1111 que usted está comenzando[1] es un curso de *mecánica newtoniana del punto material*. Nuestro objeto de estudio es el movimiento de objetos que se conceptualizan como puntos, lo que representa un alto grado de abstracción.

Si fueran físicos conocerían muy bien alguna versión de un chiste que exhibe el nivel de abstracción de que estamos hablando. En el chiste un apostador empedernido le pregunta a un físico si será posible predecir los caballos ganadores en las carreras de un hipódromo. El físico afirma que cualquiera lo puede hacer, el apostador pregunta: ¿como? y el físico contesta: "Comencemos por imaginar que todos los caballos son puntos".

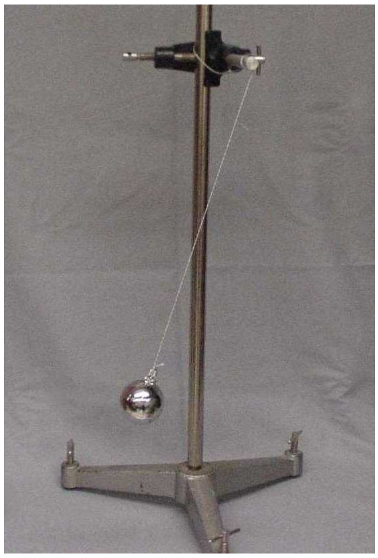
Chistoso o no, así son muchas aproximaciones de la física, no son pocas las personas que encuentran estas aproximaciones sumamente crudas y poco realistas hasta que, enfrentados a la comparación entre aquellas y algunas mediciones experimentales quedan gratamente sorprendidas con lo exitosas que resultan.

Espero que a lo largo de este curso de introdcución a la física usted aprenda a apreciar esta forma de pensar: construir aproximaciones como la de partícula puntual para crear "modelos matemáticos de la realidad", pero quiero adelantarle que a medida que se avanza en el estudio de la física, la realidad experimental nos lleva a dejar algunas aproximaciones mientras que mantenemos otras, siempre con el objetivo de obtener alguna representación cuantitativa de los

[1]Estas notas son preliminares así que seguramente encontrará montones de errores: misprints, formulitas que faltan etc. A pesar de eso espero que estudiar este material le resulte provechoso ya que está adaptado al nivel de los cursos de la USB, en la página www.fis.usb.ve usted puede encontrar una guía de problemas que se espera trate de resolver juiciosamente. Puede complementar sus lecturas con cualquier libro que desee

hechos que podemos observar en la naturaleza.

En péndulo simple. La mecánica de Newton permite predecir que siempre que las oscilaciones barran ángulos pequeños (menores a unos 30°) el período (T), es decir, el tiempo que requiere el péndulo para realizar una oscilación completa es independiente de la amplitud de las oscilaciones y proporcional a la raíz cuadrada de la longitud (ℓ) del cable ($T = constante \times \sqrt{\ell}$). Usted mismo puede observar hace algunos experimentos en casa para verificar estos hechos. Por cierto, la primera de las predicciones fue observada y reportada por Galileo Gelilei.



La mecánica del punto requiere el uso de ciertas herramientas matemáticas que le son absolutamente indispensables, entre otras, la geometría euclideana con su caracterización de rectas, puntos, planos etc. En la mecánica de Newton el espacio en que vivimos es un espacio como el que describe Euclides.

2. ¿Qué es un vector?

Como ya comentamos en la introducción la base geométrica de la mecánica de Newton es euclídea. La geometría euclídea, sin embargo, no constituye un soporte matemático suficiente para la mecánica newtoniana, para las necesidades de esta es menester introducir nuevos objetos[2]: los vectores que no son objetos definidos en la geometría de Euclídes. En esta parte del curso vamos a estudiar algunos elementos de álgebra y análisis vectorial.

Definición 1 *Un vector ($\mathbf{A}$) es un segmento orientado*

Dicho de manera más coloquial, un vector es "una flechita" de una cierta longitud que se denomina magnitud. Para designar a un vector se utiliza, como ya hemos hecho, un caracter en negrita ($\mathbf{A}$); otra notación muy extendida consiste en referir al vector por una letra con una flechita colocada encima ($\vec{A}$). La magnitud de un vector se denota por $|\mathbf{A}|$ ó $|\vec{A}|$ y evidentemente es un número real positivo.

Definición 2 *Un vector de magnitud nula se denomina vector cero.*

Es claro que dos vectores son iguales si son congruentes sin utilizar rotaciones, es decir, si a través de traslaciones con regla y escuadra podemos llevar uno sobre el otro y hacerles coincidir exactamente punto a punto. En otros términos

Definición 3 *Dos vectores son iguales:* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *si y solo si*

1. $\mathbf{A} \,||\, \mathbf{B}$
2. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ *y*
3. *La orientación de ambos vectores es la misma.*

[2]Tambien es indispensable tener una cierta noción del tiempo como cuantificable de manera contínua (el tiempo de Newton se mide con número reales)

La geometría euclídea garantiza que dos vectores no nulos y no paralelos (colineales) definen un plano único. Para ver esto basta con hacer trasladar los orígenes (las colitas) de ambos vectores hasta hacerles coincidir en un mismo punto y observar que: el origen común y los dos extremos de los vectores constituyen tres puntos no alineados en el espacio y que por lo tanto definen un único plano.

Como dos vectores no nulos ni colineales definen un plano, es posible definir un ángulo entre ellos.

Definición 4 *El ángulo entre dos vectores no nulos es el menor de los dos ángulos que aparecen cuando sus orígenes se hacen coincidir. Esta definición implica que el ángulo entre dos vectores siempre se encuentra entre cero y π radianes.*

3. Álgebra vectorial

Se pueden definir ciertas operaciones entre vectores, la más trivial es la suma entre dos vectores. Para esta operación hay dos definiciones equivalentes, consideremos una de ellas[3]

Definición 5 *Dados dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *su suma, el vector* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *se construye a través de un algoritmo de dos pasos, el primero consise en hacer coincidir el orígen de* $\mathbf{B}$ *con el extremo de* $\mathbf{A}$ *y el segundo en dibujar un vector que une el origen de* $\mathbf{A}$ *con el extremo de* $\mathbf{B}$.

Es facil convencerse de que la adición vectorial es conmutativa ($\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$) y asociativa ($\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$), además, el vector cero es el "elemento neutro" de la suma, es

[3]por favor consulte la otra definición denominada regla del paralelogramo en cualquier libro que le agrade y demuestre que efectivamente ambas definiciones son equivalentes

decir: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$.

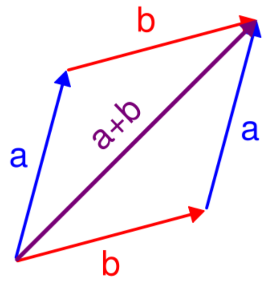


Figura 1: La adición vectorial como la hemos definido es totalmente equivalente a la "regla del paralelogramo". Las pruebas de la conmutatividad y asociatividad de la suma de vectores son aplicaciones sencillas de la geometría euclídea.

Además de esta operación[4] hay otra operación interesante, el producto de un vector por un número real no negativo.

Definición 6 *Para efectuar el producto* $\alpha\,\mathbf{A}$ *(*$\alpha \in \Re$, $\alpha \geq 0$*) basta con construir un vector paralelo y del mismo sentido que* $\mathbf{A}$ *pero con magnitud* $\alpha\,|\mathbf{A}|$*), evidentemente* $0\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Definición 7 *Dos vectores de la misma dirección y sentidos opuestos se denominan antiparalelos*

Es posible introducir una operación, el producto del número -1 por un vector.

Definición 8 *El vector* $-1(\mathbf{V})$ *no es otra cosa que un vector antiparalelo a* $\mathbf{V}$ *con la misma magnitud de* $\mathbf{V}$*. El vector* $-1(\mathbf{V})$ *se denota* $-\mathbf{V}$ *y se denomina opuesto de* $\mathbf{V}$.

[4]que los matemáticos clasifican como una ley de composición <u>interna</u>

El producto por -1 induce a su vez una nueva operación entre vectores.

Definición 9 *Dados dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *su diferencia* $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ *es el vector que resulta de la adición de* $\mathbf{A}$ *con el opuesto de* $\mathbf{B}$*.*

Adicionalemte, el producto por -1 permite extender la definición de un número real cualquiera (escalar) por un vector, en efecto,

Definición 10 $\forall \alpha \in \Re$*:* $\alpha(\mathbf{V}) \equiv sign(\alpha)|\alpha|\mathbf{V}$*.*

Finalmente, es facil demostrar que el producto por un número real es distributivo con respecto a la suma de vectores, es decir, $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

Es evidente que llevar a cabo estas operaciones debe resultar extremadamente engorroso, necesitaríamos mover flechas no coplanares en el espacio y eso además de engorroso resulta ineficaz, cabe pues preguntarse si habrá alguna otra forma de llevar a cabo las operaciones que hemos definido de tal suerte que podamos hacer algo interesante con ellas.

Terminaremos esta sección con una definición cuya utilidad se hará manifiesta más adelante.

Definición 11 *Considérense un conjunto de* N *vectores* $\mathbf{A}_1$*,* $\mathbf{A}_2$*,* $\mathbf{A}_3$*,...,*$\mathbf{A}_N$ *y otros tantos números reales* α_1*,* α_2*,...,*α_N *el vector*

$$\mathbf{B} = \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + ... + \alpha_N\mathbf{A}_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, \mathbf{A}_k$$

se denomina combinación lineal de los vectores $\mathbf{A}_1$*,...,*$\mathbf{A}_N$

4. Bases y componentes

A continuación introduciremos un nuevo concepto, un *triedro dextrogiro ortonormal de vectores* (ó base ortonormal del espacio), antes de hacerlo introduzcamos un nuevo término, un vector se denomina unitario (ó versor) si su magnitud es 1.

Definición 12 *Una base ortonormal del espacio es sencillamente un conjunto de tres vectores* $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ *unitarios que son ortogonales (perpendiculares) dos a dos y que están ordenados según la regla de la mano derecha.*

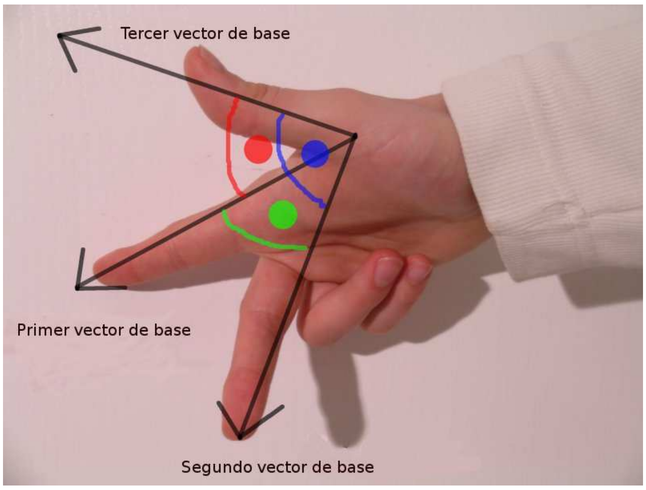


Figura 2: La regla de la mano derecha. Para que la base sea dextrogira el orden en que se nombran los vectores de base tiene que ser el que se muestra.

Lo interesante de una base es lo siguiente: dados una base ortonormal y un vector cualquiera **V** siempre es posible expresar **V** como una única *combinación lineal* de los elementos de la base, es decir, en la forma

$$\mathbf{V} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3 \,, \tag{1}$$

en donde los números reales v_1, v_2 y v_3, denominados componentes de $\mathbf{V}$, son únicos para cada vector.

Estudiar el caso más general oscurece las cosas un poco, así que les invito a considerar un caso simplificado: un plano. En un plano una base ortonormal solo puede poseer dos vectores. Consideremos pues una base ortonormal arbitraria $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ del plano[5] y un tercer vector $\mathbf{V}$ coplanar con la base. Al medir el ángulo que forman $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\mathbf{V}$ que denotaremos por θ resulta evidente que $\mathbf{V}$ se puede expresar como.

$$\mathbf{V} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2\,, \tag{2}$$

con

$$v_1 = |\mathbf{V}|\, cos\theta \qquad y \quad v_2 = |\mathbf{V}|\, sen\theta\,. \tag{3}$$

Ahora bien, como $\mathbf{V}$ está totalmente y únivocamente determinado por su magnitud orientación y sentido y estas características están totalmente codificadas en los números θ y $|\mathbf{V}|$ la combinación lineal (2) es efectivamente única.

Reflexionemos un poco acerca del caso tridimensional. Allí podemos notar que el vector que queremos representar ($\mathbf{V}$) forma un plano distinto con cada uno de los elementos de la base, en cada uno de estos planos es posible medir el ángulo que forman el vector y cada elemento de la base ($\theta_i \equiv \angle(\mathbf{A}, \hat{\mathbf{e}}_i)$ lo que lleva al resultado

$$\mathbf{V} = |\mathbf{V}|\left(cos\theta_1\, \hat{\mathbf{e}}_1 + cos\theta_2\, \hat{\mathbf{e}}_2 + cos\theta_3\, \hat{\mathbf{e}}_1\right)\,. \tag{4}$$

Los números $cos\theta_1$, $cos\theta_2$ y $cos\theta_3$ se denominan cosenos directores de $\mathbf{V}$ y satisfacen la relación

$$cos^2\theta_1 + cos^2\theta_2 + cos^2\theta_3 = 1 \tag{5}$$

[5]esto es dos vectores unitarios cuya única otra particularidad consiste en ser ortogonales entre sí

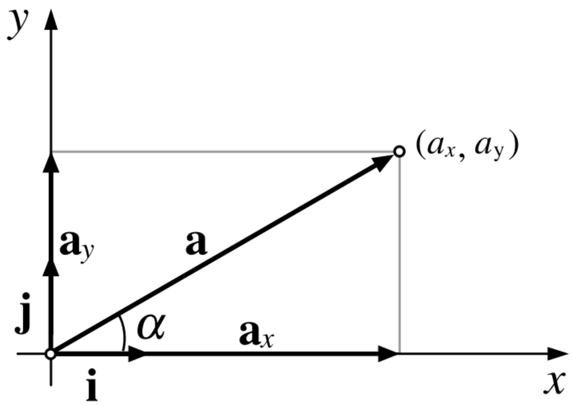


Figura 3: En la notación del diagrama: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$. Los vectores $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_y$ se expresan a su vez como $\mathbf{a}_x = a_x\mathbf{i}$ y $\mathbf{a}_y = a_y\mathbf{j}$ donde los números reales a_x y a_y son: $a_x = |\mathbf{a}|\, cos\alpha$ y $a_y = |\mathbf{a}|\, sen\alpha$ lo que lleva a la representación usual de $\mathbf{a}$ como combinación lineal de los vectores ortonormales $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,(cos\alpha\,\mathbf{i} + sen\alpha\,\mathbf{j})$.

Como consecuencia de las propiedades de la adición vectorial y del producto de escalares por vectores ocurre algo fantástico, al utilizar una base estas operaciones se pueden llevar a cabo de manera totalmente algebráica.

En efecto, consideremos dos vectores cualesquiera y una base en que les estemos representando, esto es, consideremos las dos expresiones

$$\mathbf{V} = v_1\hat{\mathbf{e}}_1 + v_2\hat{\mathbf{e}}_2 + v_3\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (6)$$

$$\mathbf{W} = w_1\hat{\mathbf{e}}_1 + w_2\hat{\mathbf{e}}_2 + w_3\hat{\mathbf{e}}_3\,. \quad (7)$$

Para calcular el resultado de la operación $\mathbf{V} + \alpha\mathbf{W}$ donde $\alpha \in \Re$ basta con utilizar la distributividad del producto de un esclar por un vector con respecto a la adición vectorial y la asociatividad de la adición vectorial para obtener de manera inmediata

$$\mathbf{V} + \alpha \mathbf{W} = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + \alpha \left(w_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + w_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + w_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \right) = \quad (8)$$

$$= \left(v_1 + \alpha\, w_1 \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(v_2 + \alpha\, w_2 \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(v_3 + \alpha\, w_3 \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (9)$$

Dicho en castellano simple, las componentes del vector suma se calculan sumando las componentes correspondientes de los vectores individuales que queremos sumar.

5. Productos que involucran vectores

Hay dos operaciones adicionales que podemos definir, los productos escalar y vectorial. El primero de ellos no constituye una ley de composición interna ya que a partir de dos vectores produce un número real. El segundo si lo es, a partir de dos vectores se obtiene un tercero.

5.1. Producto escalar

Definición 13 *Dada una base ortonormal* $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ *del espacio el prodcuto escalar* $\cdot$ *entre dos vectores es una operación que obedece las siguientes propiedades*

1. $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = 1$ *si* $i = j$ 0 *si* $i \neq j$

2. $\forall \alpha \in \Re$ $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

3. *El resultado es independiente de la base que se escoja*[6]

[6]en realidad esta propiedad es consecuencia de ciertas discusiones que están más allá del nivel de estas clases y por eso es que la inclúmos como parte de la definición

Veamos la primera consecuencia de la definición que acabamos de dar

Teorema 1 *El producto escalar de dos vectores ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$) puede calcularse utilizando las componentes de ambos vectores según*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{10}$$

Demostración Ambos vectores se escriben como combinaciones lineales de los elementos de la base ortonormal que hallamos escogido, de manera que por construcción

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \tag{11}$$

debido a la segunda propiedad que hemos introducido en nuestra definición podemos reescribir la fórmula anterior en la forma

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1) + a_1 b_2 (\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) + \ldots + a_3 b_2 (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) + a_3 b_3 (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \tag{12}$$

en donde veríamos observar que hay nueve sumandos. De estos, seis contienen productos entre elementos distintos de la base ortonormal y según la primera propiedad del producto escalar son nulos mientras que los otros tres contienen los productos $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$ cuyo valor es 1 en los tres casos lo que termina de demostrar el resultado.

Hay otro resultado sobre el cual queremos llamar la atención

Teorema 2 *El producto escalar entre dos vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *tiene por resultado el número*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \, cos\theta \tag{13}$$

donde θ es el ángulo entre ambos vectores.

Demostración: Según la última propiedad que define al producto escalr, el resultado que se obtiene al calcular $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ no depende de la base que se escoja. Ahora bien, esto significa que podemos escoger un triedro ortonormal como se nos antoje, haremos nuestra escojencia de tal suerte que el primer vector de la base sea paralelo con $\mathbf{A}$ de manera que $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{e}}_1$, tomamos en cuenta que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ forman un plano único y usamos este hecho para escoger al segundo vector de la base como un vector en ese plano que cumpla la condición de ortogonalidad con $\hat{\mathbf{e}}_1$. La dirección de $\mathbf{B}$ no tiene porque coincidir con la de $\hat{\mathbf{e}}_2$, pero de todas maneras estamos seguros de que

$$\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\left(cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_1 + sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_2\right)\ . \tag{14}$$

donde θ es el ángulo que $\mathbf{B}$ forma con $\hat{\mathbf{e}}_1$ de acuerdo a esto,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{e}}_1\cdot\{|\mathbf{B}|\left(cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_1 + sen\theta\,\hat{\mathbf{e}}_2\right)\}\ . \tag{15}$$

utilizando la distributividad del producto escalr y recordando que $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0$ se obtiene el resultado que queríamos demostrar.

Hay tres observaciones bastante obvias que por utilizarse extensivamente cabe resaltar.

1. El producto escalar de dos vectores no nulos ortogonales es cero.

2. Las componentes de un vector en una base ortonormal se encuentran calculando el producto escalar del vector con el elemento de base correspondiente, así, por ejemplo, la segunda componente de un vector $\mathbf{A}$ es sencillamente $a_2 = \hat{\mathbf{e}}_2.\mathbf{A}$.

3. La magnitud (ó módulo) de un vector se puede calcular notando que $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}.\mathbf{A}}$.

Nuestra presentación del producto escalar que comienza con la definición 13, tiene como consecuencia el teorema 2, en gran parte de la literatura dedicada a la física para ciencias e ingeniería la presentación del producto escalar se realiza en el orden inverso, se comienza con la fórmula 13 y la fórmula 10 se deriva de allí. Hay una razón muy poderosa que me impulsa a presentar las cosas en la forma en que lo estoy haciendo, la definición 13 se puede generalizar a cosas que en este momento no reconoceríamos como conjuntos de "vectores' pero que efectivamente lo son, un ejemplo de tales cosas es el conjunto $\mathcal{P}_N[-1,1]$ de todos los polinomios de grado N definidos en el intervalo $[-1,1]$, este conjunto de objetos tiene todas las propiedades de los vectores que hemos estado estudiando salvo una: una base ortonormal de este conjunto de vectores tiene N elementos en lugar de tres, la base ortonormal esta constituida por ciertos polinomios particulares denominados Polinomios de Legendre ($P_\ell(x)$) de los cuales solo hay que utilizar los primeros N, y que son ortonormales bajo el producto escalar $f \cdot g \equiv \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. De todas formas, si esto no le llama la atención -por el momento- piense que la única razón para presentar las cosas en la forma en que lo estamos haciendo es mostrar otro punto de vista.

5.2. Producto vectorial

Este producto que, como ya comentamos antes, produce como resultado vectores y admite una definición parecida a la que utilizamos con el producto escalra.

Definición 14 *Dada una base dextrogira ortonormal el producto vectorial o producto cruz entre dos vectores satisface las siguientes propiedades*

1. $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = 0$ *siempre que* $i = j$.
2. *En los otros casos el resultado es el siguiente* $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_k$ *(*$i \neq j \neq k$ *para todas las permutaciones cíclicas de* 1, 2 *y* 3 *y* $\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = -\hat{\mathbf{e}}_k$ *(*$i \neq j \neq k$ *para todas las permutaciones*

anticíclicas.

3. $\forall \alpha \in \Re\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \alpha \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

Ciertamente la segunda propiedad que aparece en la definición del producto vectorial parec algo complicada, sin embargo es muy sencilla de entender. Para ello basta con explicar que son las permutaciones cíclicas y anticíclicas del conjunto ordenado $(1, 2, 3)$.

Definición 15 *Considere la lista* $L : 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ *una permutación cíclica del conjunto ordenado* $(1, 2, 3)$ *es cualquier triplete reordenamiento del conjunto en que que sus elementos aparezcan como una sublista de* L *que pueda leerse de izquierda a derecha. Una permutación anticíclica aparece como una sublista que tiene que ser leída de derecha a izquierda.*

Según la definición que acabamos de dar, el conjuto $(3, 1, 2)$ corresponde a una permutación cíclica del conjunto $(1, 2, 3)$ mientras que $(1, 3, 2)$ se obtiene a través de una permutación anticíclica.

Apliquemos lo que acabamos de exponer a un par de ejemplos explícitos: $\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$ mientras que $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = -\hat{\mathbf{e}}_2$

El resultado fundamental del producto vectorial es el siguiente

Teorema 3 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\, sen\theta\, \hat{\mathbf{n}}$ *donde* $\hat{\mathbf{n}}$ *es el vector unitario normal al plano formado por los vectores* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *orientado según la regla de la mano derecha.*

Demostración: Para demostrar este resultado podemos utilizar un argumento que ya nos debería ser familiar, escojer la base ortonormal de manera de exdos vectores de la misma dirección y sentidos opuestos se denominan antiparalelospresar los vectores $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ en la forma

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{e}}_1 \tag{16}$$

$$\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\left(cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_1 + sen\theta\, \hat{\mathbf{e}}_2\right) \tag{17}$$

donde θ es el ángulo que $\mathbf{B}$ forma con $\hat{\mathbf{e}}_1$. Al efectuar el producto se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{e}}_1 \times |\mathbf{B}|\left(cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_1 + sen\theta\, \hat{\mathbf{e}}_2\right) && (18) \\ &= |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\, cos\theta \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1 + |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| sen\theta \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = && (19) \\ &= |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| sen\theta \hat{\mathbf{e}}_3 && (20) \end{aligned}$$

como nuestra convención consiste en utilizar siempre triedros dextrogiros $\hat{\mathbf{e}}_3$ es el vector unitario normal al plano formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ orientado según la regla de la mano derecha lo que completa la prueba del teorema

Como en el caso del producto escalar, vale la pena llamar la atención sobre un par de cosas

1. De caracter geométrico, esta observación consiste en notar que la magnitud del producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es igual al área formada por el pralelogramo formado por $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

2. Esta observación es de caracter práctico, si utilizamos las reglas que definen a un determinante podemos poner $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

6. Vectores fijos y deslizantes

Hasta este punto deberíamos estar convencidos de que podemos utilizar técnicas de regla y escuadra para desplazar los vectores hasta donde nos plazca y es por esto que vale la pena detenerse acá para meditar sobre esto.

Ciertamente, no hay problema con desplazar los vectores a donde queramos siempre y cuando mantengamos en mente las razones por lo que lo estamos haciendo. Con el fin de mantener esto bajo control los matemáticos definen los *vectores deslizantes* como aquellos que pueden moverse libremente a cualquier punto del espacio sin preocuparnos de si podemos hacerlo o no (de hecho al conjunto de vectores con que se puede jugar de esta manera se les asigna un nombre especial: espacio afín).

Definición 16 *Un vector se denomina de origen fijo si solo puede desplazarse para fines de cálculo.*

Definición 17 *Dos vectores de origen fijo son iguales si y solo si tienen el mismo origen y son iguales como vectores deslizantes.*

Ejemplo 1 *Consideremos cuatro puntos en un plano, P_1, P_2, P_2 y P_4 y una base ortonormal en el plano, y supongamos que los segmentos P_1P_2, P_3P_4 son paralelos y de la misma longitud. Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_3P_4}$ no son iguales como vectores de origen fijo ya que sus orígenes, los puntos P_1 y P_3 no son los mismos en general.*

No es dificil pensar en un ejemplo físico de un vector con origen fijo, el vector de posición de un punto P en el espacio referida a un origen fijo O (que denotaremos como $\overrightarrow{OP}$. Utilzando coordenadas cartesianas con origen en O y usando la notación usual, las coordenadas de P se representan como un par de números reales (x_P, y_P) en que las magnitudes de los números x_P y y_P indican distancias al origen, mientras que los signos de dichos números tienen que ver con el cuadrante en que se encuentra P. Así por ejemplo, si las coordenadas de P se miden en metros las coordenadas $(-1, 2)$ indican que P se encuentra en el segundo cuadrante del sistema cartesiano cuypo origen es O.

Como ya comentamos, la posición de P define naturalmente un vector $\overrightarrow{OP}$ que -si escojemos una base ortonormal del plano cuya orientación corresponda con la de los ejes $x-y$- es sencillamente: $\overrightarrow{OP} = -\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2$ que debe entenderse como un vector cuyo origen es O y cuyo extremo coincide con P.

Aprovechemos estas ideas sencillas y todo el material que hemos acumulado hasta ese punto para estudiar un problema integrador.

Ejemplo 2 *Ecuación de un plano que pasa por tres puntos. Sean P, Q y R tres puntos en el espacio y sea O un punto fijo que consideraremos como origen.*

Los vectores de posición de los tres puntos son $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ y por otra parte los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ están contenidos en el plano. Consideremos un nuevo punto X que tambien está en el plano, el vector $\overrightarrow{PX}$ también estará contenido en el plano y puede reexpresarse como $\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{OP}$. Como el vector $\overrightarrow{PQ}$ pertenece al plano que contiene a los puntos $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$ tiene que ser ortogonal a cualquier vector $\mathbf{N}$ ortogonal a dicho plano y por lo tanto el producto escalar $\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{N}$ debe ser nulo, de acuerdo a esto, el plano está caracterizado por la igualdad

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{PX} = 0\,, \tag{22}$$

ahora bien, podemos construir un vector ortogonal al plano a través del producto vectorial $\mathbf{N} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$*, de esta manera, si* X *es un punto arbitrario en el plano puede asegurarse*

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PX} = 0\,, \tag{23}$$

y esto implica que la ecuación del plano es

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PX} = (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{OP}\,, \tag{24}$$

Si se escoje una base ortonormal orientada según los ejes coordenados la ecuación del plano toma la forma algo más familiar

$$Ax + By + Cz = D\,, \tag{25}$$

donde x, y, z *son las coordenadas de un punto arbitrario que pertenece al plano.*

7. Diferenciación con respecto a un parámetro

Uno de los aspectos matemáticos fundamentales de la mecánica newtoniana es la aparición constante de vectores que dependen de un parámetro contínuo (un número real). Algo como

$$\mathbf{A}(t)\,, \tag{26}$$

debe entenderse como una función de variable real con valores en los vectores, ó dicho en los términos más sencillos, es un obesto se pujeto que -en una base ortonormal dada- se expresa como

$$\mathbf{A}(t) = a_1(t)\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2(t)\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3(t)\hat{\mathbf{e}}_3\,, \tag{27}$$

donde es necesario que entendamos que las componentes $a_i(t)$ son funciones de variable real que toman valores reales.

Estas funciones vectoriales dependientes de un parámetro se tratan como cualquier otro vector aunque debemos decir que admiten una nueva operación, la diferenciación con respecto al parámetro que actúa sobre ellos de manera no trivial.

Definición 18 *Dado un vector dependiente de un parámetro, la derivada del vector con respecto al parámetro está dada por*

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \tag{28}$$

Esta nueva operación podría parecer algo extraño, sin embargo, está basada en operaciones que ya sabemos realizar, la única cosa con la que habría que tener cuidado es en asegurarse delk comportamiento de la base con respecto al parámetro que, en lo que sigue consideraremos trivial, es decir, supondremos por el momento que la base es independiente del parámetro (está compuesta por tres vectores constantes).

Antes de llevar adelante la diferenciación estudiemos el cociente incremental finito[7]. El cociente incremental requiere de una sustracción de vectores que ya sabemos hacer porque los vectores de la base son constantes y de una división por el número Δt que no es otra cosa que un producto por un escalar (el número $1/\Delta t$, así, todos los ingredientes del objeto están bien definidos y por eso podemos poner

$$\frac{\Delta\mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \frac{a_1(t+\Delta t) - a_1(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{a_2(t+\Delta t) - a_2(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{e}}_2\,. \tag{29}$$

[7]lo haremos en el plano para que las expresiones luzcan más cortas

Al tomar el límite para calcular la derivada resulta (porque el límite de una suma es la suma de los límites)

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_1(t+\Delta t) - a_1(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_2(t+\Delta t) - a_2(t)}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{e}}_2\,. \tag{30}$$

Miremos el factor

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_1(t+\Delta t) - a_1(t)}{\Delta t} \tag{31}$$

que aparece. Este no es más que la derivada usual de la función $a_1(t)$ (a usanza de los físicos es denotar esta derivada por $\dot{a}_1(t)$ y en estas notas seguiremos esa convención), en definitiva, hemos probado que la fórmula 30 se puede reescribir como:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} \equiv \dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_1(t)\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{a}_2(t)\,\hat{\mathbf{e}}_2\,. \tag{32}$$

Dicho en palabras llanas, si expresamos un vector dependiente de un parámetro como combinación lineal de una base constante, su derivada con respecto al parámetro es un nuevo vector cuyas componentes con respecto a la base son las derivadas ordinarias de las componentes del vector original.

El resultado que acabamos de obtener se generaliza trivialmente a tres dimensiones para obtener que (en la hipótesis de que la base es constante)

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{a}_1(t)\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{a}_2(t)\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \dot{a}_3(t)\,\hat{\mathbf{e}}_3 \tag{33}$$

8. Integración con respecto a un parámetro

Relacionada con la operación de diferenciación que discutimos en la sección anterior podemos considerar la fórmula:

$$\mathbf{u} = \int ds\, \mathbf{w}(s)\,, \tag{34}$$

donde s representa un parámetro real. En vista de que la integración no es otra cosa que la operación inversa de la diferenciación no queda otra opción que definir:

$$\int ds\, \mathbf{w}(s) \; = \mathbf{e}_1 \int ds\, w_1(s) + \mathbf{e}_2 \int ds\, w_2(s) + \mathbf{e}_3 \int ds\, w_3(s)\,, \tag{35}$$

en donde los vectores $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ son los elementos de una base ortonormal y las funciones $w_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ son las componentes del vector $\mathbf{w}(s)$ en dicha base.

9. Complemento: Cambios de base

Usted debería haberse dado cuenta de que el valor numérico de las componentes de un vector cambia al cambiar la base que se esté utilizando, en esta sección vamos a estudiar un tema algo avanzado relacionado precisamente con esta observación del cambio de componentes al cambiar la base.

Consideremos el caso plano. Demos dos bases $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2$ sea $\mathbf{W}$ un vector arbitrario entonces

$$\mathbf{W} = w_1\hat{\mathbf{e}}_1 + w_2\hat{\mathbf{e}}_2 \tag{36}$$

$$\mathbf{W} = w'_1\hat{\mathbf{e}}'_1 + w'_2\hat{\mathbf{e}}'_2 \tag{37}$$

Queremos inquirir acerca de la posibilidad de alguna relación especial entre las componentes del vector en ambas bases, después de todo, deben contener la misma información.

Para comenzar con nuestro estudio notemos que podemos expresar cualquiera de las bases en términos de la otra. Por ejemplo, si expresamos la base no primada en términos de la primada tenemos que escribir dos combinaciones lineales

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = b_{11}\hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{12}\hat{\mathbf{e}}'_2 \tag{38}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = b_{21}\hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{22}\hat{\mathbf{e}}'_2 \tag{39}$$

resultado que en notación matricial se expresa como,

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Si hubieramos decidido hacer lo contrario hubieramos podido poner (en notación matricial) por otro lado, tambien podemos poner a la base primada en términos de la no primada

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Estas fórmulas implican que las matrices de coeficientes a_{ij} y b_{kl} tienen que satisfacer la condición

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

que se expresa diciendo que son inversas la una de la otra. Por otra parte, habíamos aprendido que las componentes de un vector con respecto a una base ortonormal se calculaban como los productos escalares con los elementos de la base, de acuerdo a esto

$$b_{11} = e_1.e'_1 \qquad b_{12} = e_1.e'_2 \tag{43}$$

$$b_{21} = e_2.e'_1 \qquad b_{22} = e_1.e'_2\,, \tag{44}$$

por las mismas razones la matriz de los coeficientes a_{ij} que permite expresar la base primada en términos de la base sin primar y que tiene la siguiente forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{45}$$

tiene como entradas efectivas las siguientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{46}$$

de manera que la matriz **A** es la transpuesta de la matriz **B** cuyos coeficientes son los números b_{ij}. En resumen, puede afirmarse que

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{47}$$

donde **I** es la matriz que solo tiene unos en la diagonal, la matriz identidad.

Volvamos a la relación que estamos buscando, podemos escribir al vector $\mathbf{W}$ utilizando sus componentes en la base no primada y haciendo aparecer los vectores de la base primada usando como

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= w_1 \left[b_{11} \hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{12} \hat{\mathbf{e}}'_2 \right] + w_2 \left[b_{21} \hat{\mathbf{e}}'_1 + b_{22} \hat{\mathbf{e}}'_2 \right] = \qquad (48) \\
&= \left(w_1 b_{11} + w_2 b_{21} \right) \hat{\mathbf{e}}'_1 + \left(w_1 b_{12} + w_2 b_{22} \right) \hat{\mathbf{e}}'_2 \,. \qquad (49)
\end{aligned}$$

si ahora usamos que la igualdad entre $b_{ij} = a_{ji}$ podemos poner

$$\mathbf{W} = \left(w_1 a_{11} + w_2 a_{12} \right) \hat{\mathbf{e}}'_1 + \left(w_1 a_{21} + w_2 a_{22} \right) \hat{\mathbf{e}}'_2 \,. \qquad (50)$$

De manera que, en definitiva, las componentes de un vector expresadas en dos bases distintas se relacionan como sigue:

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \,, \qquad (51)$$

Una regla nemotécnica para recordar esto es la siguiente:

componentes nuevas=(matriz que expresa base nueva en términos de vieja)(componentes viejas)